Existenz von Graphen jeden Grades mit Hamilton-Färbung

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 35, 1983, S.7-13

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Existenz von Graphen jeden Grades mit Hamilton-Färbung

Von **Theodor Kaluza**, Hannover

(eingegangen am 18. 11. 1982)

Wir suchen schlingenfreie Graphen, deren Kanten so mit $g \geqq 2$ Farben gefärbt werden können, daß neben der üblichen allgemeinen Kantenfärbungs-Bedingung:

(aB) benachbarte Kanten bekommen verschiedene Farben,
auch gilt:

(HF) für je 2 der g Farben bilden die Kanten mit diesen beiden Farben einen Hamilton-Kreis;

eine Kantenfärbung, die neben (aB) auch (HF) erfüllt, nennen wir eine Hamilton-Färbung, – kürzer: H-Färbung des betr. Graphen.

Wir ersparen dem Leser (und uns) die sehr einfache Begründung der

(F 1) Feststellung 1: Besitzt der Graph G eine H-Färbung, so ist G endlich, zusammenhängend, g-regulär, brückenlos und endkantenfrei; ferner ist die Eckenzahl e von G gerade, – und wenn sie > 2 ist, hat G auch keine Mehrfachkanten.

Satz 1: Für jedes $g \geqq 2$ gibt es bipartite Graphen, die eine Hamilton-Färbung mit g Farben besitzen.

Beweis durch Angabe von Beispielen:

Es sei p eine Primzahl $\geqq g$; es seien weiter $c_1, \ldots, c_g$ Bezeichnungen für die g Farben und $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_p$ die Namen der 2p Ecken des zu bildenden Graphen; die Ecken-Indizes sind im folgenden mod p zu lesen:

ein bipartiter Graph mit einer H-Färbung aus g Farben entsteht nun, wenn man

p c_1-farbige Kanten $a_1 — b_1$, $a_2 — b_2, \ldots, a_p — b_p$,
p c_2-farbige Kanten $a_1 — b_2$, $a_2 — b_3, \ldots, a_p — b_{p+1}$,
. . . . . .
p c_g-farbige Kanten $a_1 — b_g$, $a_2 — b_{g+1}, \ldots, a_p — b_{p+(g-1)}$
einfügt, – denn:

die Bipartitheit des so definierten Graphen ist aus den Kantenbezeichnungen abzulesen, und für jede Farbe sind die Kanten mit dieser Farbe ersichtlich als 1-Faktor gewählt, so daß (aB) zutrifft und – da diese 1-Faktoren paarweise kantenfremd sind – für je 2 der g Farben die Kanten mit diesen beiden Farben einen 2-regulären Teilgraphen bilden, – also entweder einen Kreis, der dann, wie behauptet, ein Hamilton-Kreis ist, oder mehrere Kreise, deren jeder dann eine (gerade) Länge $<2p$ hätte; es genügt daher zu zeigen, daß es keinen 2-farbigen Kreis einer Länge $<2p$ gibt:

sei also a_m eine Ecke eines 2-farbigen Kreises K mit den Kantenfarben c_i und c_j, wobei $1 \leqq i < j \leqq g \leqq p$ angenommen werden darf; dann gehören zu K die c_j-farbige mit a_m inzidente Kante a_m—b_{m+j-1} und (daher auch) die c_i-farbige mit b_{m+j-1} inzidente Kante b_{m+j-1}—$a_{m+j-1-(i-1)} = b_{m+j-1}$—$a_{m+(j-i)}$;

bei einer Durchlaufung von K in der durch $a_m \longrightarrow b_{m+j-1}$ angegebenen Richtung wachsen also die Indizes der $a_{\dots}$-Ecken von jeder zur jeweils nächsten um $j-i$; bei einer Länge 2k von K ist daher $a_{m+k(j-i)} = a_m$ und also $k(j-i)$ ein Vielfaches von p; wegen des Primzahlcharakters von p können dabei k und $j-i$ nicht beide $<p$ sein; da aber $j-i<p$ ist, folgt $k \geqq p$, was zu beweisen war. □

Hinweis: Der $K_{p;p}$ (p eine Primzahl) ist eins der im Beweis zu Satz 1 entwickelten Beispiele, – er gestattet also eine Hamilton-Färbung mit p Farben.

Das Auffinden von nicht-bipartiten Graphen mit Hamilton-Färbungen ist etwas umständlicher:

Bezeichnungen: K sei ein Kreis mit der geraden Länge 2n; seine Ecken bezeichnen wir, ihn einmal durchlaufend, der Reihe nach einfach mit 1, 2, ..., 2n; wir fügen zu K zwar Kanten, aber keine weiteren Ecken hinzu, – ganze Zahlen $>2n$ oder <1 als Eckennamen sind dabei mod 2n zu lesen; fügen wir für irgendein i zu K die n neuen Kanten

$$i—(i+n) \text{ und } (i-1)—(i+1), (i-2)—(i+2), \dots, (i-(n-1))—(i+(n-1))$$

hinzu, so nennen wir das das „Einsetzen des Fenstergitters Fg_i"; die Kantenmenge selbst heißt natürlich „das Fenstergitter Fg_i" und spezieller die Kante $i—(i+n)$ der „Querbalken" dieses Fenstergitters und die übrigen Kanten seine „Stäbe"; nach dem Einsetzen von Fenstergittern nennen wir K den „Grundkreis" des entstandenen Graphen, – in dem K übrigens ein Hamilton-Kreis ist –, und den entstandenen Graphen selbst einen „Fg-Graphen";

in einem Fg-Graphen G ist jedes eingesetzte Fenstergitter ersichtlich ein 1-Faktor; da K eine gerade Länge hat, kann man K mit 2 Farben färben; färbt man danach jedes der eingesetzten Fenstergitter mit einer weiteren Farbe, so hat man eine im Sinne von (aB) korrekte Kanten-Färbung von G hergestellt: diese – bis auf die Wahl der Farben ja eindeutige – Färbung nennen wir die „Fg-Färbung von G";

wir werden sehen, daß die Fg-Färbung bei manchen Graphen – jedoch nicht bei allen! – eine Hamilton-Färbung ist; zunächst aber stellen wir fest:

(F 2) Feststellung 2: Fg-Graphen sind nicht bipartit, – denn jeder Stab jedes eingesetzten Fg bildet mit jedem der beiden Wege, in die seine Endpunkte den Grundkreis zerlegen, einen Kreis ungerader Länge. □

(F 3) Feststellung 3: Zu einem Grundkreis der Länge 2n gibt es genau n als Kantenmengen paarweise verschiedene (nicht immer kantenfremde!) Fenstergitter: $Fg_1, Fg_2, \ldots, Fg_n$; – denn als Kantenmenge ist – vgl. Def. – stets $Fg_{i+n} = Fg_i$.

Um sicher zu gehen, daß wir nur Fg-Graphen ohne Mehrfachkanten betrachten, – s. (F 1) –, überlegen wir:

ein Fenstergitter ist eindeutig bestimmt (s. Def.), wenn wir
(a) eine seiner Kanten kennen, und
(b) wissen, ob diese Kante ein Stab oder der Querbalken ist;

zwei Fenstergitter können daher nur auf die Art nicht-kantenfremd sein, daß der Querbalken des einen zugleich ein Stab des anderen ist; nun zerlegen die Endpunkte des Querbalkens den Grundkreis K in 2 gleichlange Wege der Länge n, wenn 2n die Länge von K ist; die Endpunkte $(i-x)$ und $(i+x)$ eines Stabes zerlegen K in Wege der Längen 2x und $2n-2x$, die genau dann auch gleichlang sind, wenn $2x = n$, also wenn $n = 2m$ gerade und $x = m$ ist. Damit haben wir:

(F 4) Feststellung 4: Bei Grundkreisen (gerader, aber) nicht durch 4 teilbarer Länge entstehen durch das Einsetzen verschiedener Fenstergitter keine Mehrfachkanten; bei Grundkreisen einer Länge 4m haben für jedes i Fg_i und Fg_{i+m} zwei gemeinsame Kanten, – andere Fg-Paare sind auch bei durch 4 teilbarer Grundkreislänge kantenfremd.

Der Versuch, nicht-bipartite Graphen mit Hamilton-Färbungen mit Hilfe von Fenstergittern zu gewinnen, beruht auf der folgenden mühelos verifizierbaren

(F 5) Feststellung 5: Setzt man in einen Kreis gerader Länge ein Fenstergitter ein, so ist die Fg-Färbung des entstandenen Graphen eine Hamilton-Färbung.*)

(F 5) zeigt:

(F 6) Feststellung 6: Die Fg-Färbung eines Fg-Graphen G ist genau dann eine Hamilton-Färbung, wenn die Kanten von je 2 Fenstergittern einen Hamilton-Kreis von G bilden.

Die Fenstergitter-Definition zeigt schließlich:

(F 7) Feststellung 7: Bei jedem Stab eines Fenstergitters sind die Namen der

*) Vgl. auch Th. Kaluza, Existenz-, Nichtexistenz- und Aufbau-Aussagen für 3H-Graphen, Abh. d. Braunschw. Wiss. Ges., Band XXXII (1981), Satz 2.

Endpunkte von gleicher Parität (:= beide gerade oder beide ungerade natürliche Zahlen); bei dem Querbalken sind die Endpunktnamen auch von gleicher Parität, wenn n gerade ist, aber von ungleicher Parität, wenn n ungerade ist.

(H) Hilfssatz: G sei ein Fg-Graph, – entstanden durch das Einsetzen von 2 verschiedenen Fenstergittern in einen (Grund-)Kreis K der geraden Länge 2n; dann gibt es wegen (F 3) zwei Indizes i und j: $1 \leqq i < j \leqq n$, so daß Fg_i und Fg_j die beiden eingesetzten Fenstergitter sind;

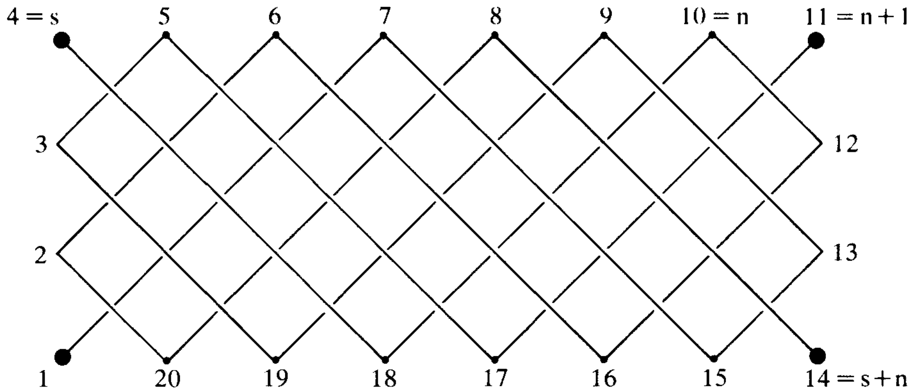
wenn dabei $j-i$ und $i+n-j$ teilerfremd sind, dann bilden die Kanten von Fg_i mit den Kanten von Fg_j

bei ungeradem n einen Hamilton-Kreis
und
bei geradem n zwei eckenfremde Kreise der Länge n.

Beweis: Eine Verkleinerung (mod 2n) aller Eckennamen um eine Konstante würde an G nichts ändern; wir können daher o.B.d.A. $i=1$ setzen und von Fg_1 und Fg_s: $1 < s \leqq n$ reden; unsere Voraussetzung lautet dann: $s-1$ und $1+n-s$ sind teilerfremd;

wenn Aussagen über Kreislängen in G für ein Modell von G zutreffen, treffen sie auch für G selbst zu: wir benutzen als Modell von G ein in einem ebenen cartesischen Koordinatensystem gelegenes achsenparalleles Rechteck R mit der Breite $b = 1+n-s$ und der Höhe $h = s-1$, dessen Ecken Gitterpunkte sind; die auf den Seiten von R gelegenen Gitterpunkte sollen, – bei der „linken unteren" Ecke beginnend und R im Uhrzeigersinn umlaufend –, die Ecken 1, 2, …, 2n von G repräsentieren, – die 4 Ecken von R entsprechen bei dieser Umlaufung den Ecken 1, s, $1+n$ und $s+n$ von G; die Stäbe unserer beiden Fenstergitter sollen durch die Strecken mit den entsprechenden Endpunktnamen repräsentiert werden: das sind hier alle Strecken, die (durch das Innere von R) parallel zu der Winkelhalbierenden des 1. oder 2. Quadranten verlaufen, und deren Endpunkte Gitterpunkte auf den Seiten von R (einschließlich der Ecken von R) sind, – die zahlreichen Schnittpunkte dieser Strecken ignorieren wir, da sie keine Ecken von G repräsentieren; für die Schlüsse, die sich auf dieses Modell stützen, ist es belanglos, wie die beiden Querbalken und die Kanten von K repräsentiert werden, wir lassen dies daher offen;

die folgende Figur zeigt das Modell für den Fall $n = 10$, $s = 4$, soweit wir es benutzen:



(H') wir zeigen: ein Kreis C in G, der nur aus Stäben besteht, hat mindestens die Länge n;

nämlich: C kann keine der 4 Ecken von R enthalten, – sonst müßte C ja auch einen Querstab oder eine Kante von K enthalten; im Falle s = 2 gehören nun alle Stäbe mit ungeraden Endpunktnamen zu dem Kantenzug 1—3—(2n−1)—5—(2n−3)—7—..., der bei einer anderen der 4 Ecken von R endet, und alle Stäbe mit geraden Endpunktnamen gehören zu dem Kantenzug 2—(2n)—4—(2n−2)—6—..., für den dasselbe gilt, – bei s = 2 gibt es die fraglichen Kreise also gar nicht;

bei s > 2 denken wir uns diejenigen Ecken von C „markiert", die auf der Seite 1...s oder auf der dazu parallelen Seite (1+n)...(s+n) von R liegen, also die Ecken 2, 3, ..., s−1 und die Ecken n+2, n+3, ..., s+n−1, soweit sie zu C gehören; wenn wir dann die Kanten von C, die zwischen zwei bei einer Durchlaufung von C aufeinanderfolgenden markierten Ecken liegen, auf die Seite s...(1+n) von R (die „Oberkante") projizieren, ist die Summe (der Längen) dieser Projektionen = b; die Summe der Projektionen aller Kanten von C auf diese Seite von R ist daher ein Vielfaches von b, etwa xb, wobei wegen der Kreisgestalt von C x zugleich die Anzahl der markierten Ecken ist; analog finden wir: die Summe der Projektionen aller Kanten von C auf die Seite 1...s von R ist ein Vielfaches von h, etwa yh, und dabei ist y die Anzahl der Ecken von C, die bei diesem zweiten Markierungs- und Projektionsschritt markiert wurden; – da nun jede Ecke von C bei genau einem dieser beiden Schritte markiert wurde, ist x+y die Gesamtzahl der Ecken auf C, also die Länge L von C;

die Kanten von C halbieren als Stäbe – s. Modell – den rechten Winkel zwischen benachbarten Seiten von R, so daß die Projektionen jeder Kante von C auf die Seiten $1 \ldots s$ und $s \ldots (1+n)$ von R gleichlang sind: es ist also $xb = yh$; hier sind b und h als teilerfremd vorausgesetzt, so daß ein Vergleich der Primzahlzerlegungen dieser beiden gleichen Produkte lehrt, daß $x \geqq h$ und $y \geqq b$ und also $L = x+y \geqq b+h = n$ ist, – womit (H') bewiesen ist;

wegen (F 4) sind bei unserer Voraussetzung Fg_1 und Fg_s kantenfremde 1-Faktoren in G, so daß ihre Kanten entweder einen Kreis oder mehrere Kreise – jeden von gerader Länge $\geqq 4$ – bilden; ein solcher Kreis kann nur dann Ecken mit geraden Namen und Ecken mit ungeraden Namen enthalten, wenn er eine gerade Zahl von Kanten mit Endpunktnamen je ungleicher Parität enthält: nach (F 7) gibt es bei unseren beiden Fenstergittern bei geradem n gar keine solchen Kanten, und bei ungeradem n genau zwei, nämlich die beiden Querbalken:

bei ungeradem n bilden Fg_1 und Fg_s folglich mit Sicherheit einen Kreis CQ, der die beiden Querbalken enthält; wäre CQ kein Hamilton-Kreis, so gäbe es einen weiteren nur aus Stäben bestehenden Kreis C?, auf dem dann nur Ecken mit Namen von gleicher Parität lägen; da auf CQ mindestens 2 Ecken mit geraden Namen und mindestens 2 mit ungeraden Namen liegen, und es nur n gerade Eckennamen und n ungerade Eckennamen in G gibt, könnte C? also höchstens die Länge $n-2$ haben, – die von den beiden Fenstergittern gebildeten Kreise sind ja eckenfremd –, was aber (H') widerspräche;

bei geradem n muß s auch gerade sein, – sonst wären ja $s-1$ und $1+n-s$ beide gerade und also nicht teilerfremd; also hat der Querbalken $1—1+n$ ungerade und der Querbalken $s—s+n$ gerade Endpunktnamen: daraus ergibt sich, ganz ähnlich wie bei ungeradem n, ein auf (H') gestützter indirekter Beweis des zweiten Teils der Behauptung des Hilfssatzes. □

Für $g = 2$ ist die Frage nach den Hamilton-färbbaren Graphen problemlos: Es sind die Kreise gerader Länge und nur sie. Sie sind alle bipartit, – daher wird im folgenden Satz $g \geqq 3$ angenommen:

Satz 2: Es seien $g \geqq 3$, p eine Primzahl $\geqq g$ und K ein (Grund-)Kreis der Länge 2p; setzt man in K $g-2$ beliebige paarweise verschiedene Fenstergitter ein, so ist die Fg-Färbung des entstandenen Graphen G eine Hamilton-Färbung mit g Farben und G nicht-bipartit.

Beweis: (F 6) zeigt zusammen mit dem Hilfssatz, daß eine Hamilton-Färbung vorliegt; die nicht-Bipartitheit wurde schon in (F 2) begründet. □

Bemerkungen: Für den Eckengrad $g = 3$ gibt die in der Fußnote zu (F 5) genannte Arbeit weitergehende Resultate über planare Graphen mit Hamilton-Färbungen und vor allem ein Verfahren zur Gewinnung aller Graphen (mit H-Färbung) aus einem beliebigen einzelnen, bei dem jeder Einzelschritt höchstens 4 Ecken und 9 Kanten involviert; für $g > 3$ wird Entsprechendes wohl auch möglich sein;

die in Satz 1 und 2 genannten Beispiele sind für $g \geqq 5$ (also $p \geqq 5$) sicher nicht planar: die Frage, ob es für diese Eckengrade auch planare Graphen mit Hamilton-Färbung gibt, ist offen;

der Beweis des Hilfssatzes läßt sich noch anschaulicher führen, indem man C bei einer Ecke „aufschneidet" und durch eine Folge von Spiegelungen von R an den Seiten von R zu einer Strecke „begradigt"; – man kann ihn aber mit demselben Grundgedanken auch rein graphentheoretisch formulieren, indem man die Projektionen der Stäbe mit Hilfe von Eckennamen-Differenzen definiert: das ist nicht schwierig, wegen einiger notwendiger Fallunterscheidungen aber langatmiger als der hier niedergeschriebene Beweis.